

The logo of the Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives (CEA), featuring the lowercase letters 'cea' in a white, stylized font with a green horizontal line underneath.

Stagiaire : Clément RICHEFORT
Tuteur entreprise : Matthieu LECOUCVEZ
Tuteur école : Serge G. PETITON
Entreprise : CEA/CESTA
Dates : 01/02/2021 - 30/07/2021

DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

Analyse des méthodes multigrilles appliquées à l'équation de Helmholtz indéfinie

29 septembre 2021

Clément RICHEFORT | Polytech LILLE - Informatique et Statistique

- 1 - *Présentation du CEA et contexte*
- 2 - *Cahier des charges*
- 3 - *Démarche scientifique*
 - 3.1 - *Principe général de la méthode*
 - 3.2 - *Application à l'équation de **Laplace***
 - 3.3 - *Application à l'équation de **Helmholtz** indéfinie*
 - 3.4 - *Recherche d'interpolateurs efficaces*
 - 3.5 - *Recherche de méthodes de lissage appropriées*
- 4 - *Résultats et conclusion*
 - 4.1 - *Expérimentation numérique*
 - 4.2 - *Conclusion*

Acteur majeur en matière de recherche, de développement et d'innovation, le CEA, établissement public à caractère scientifique, technique, commercial et industriel, intervient dans quatre grands domaines :

- les énergies bas carbone,
- les technologies pour l'information et la santé
- les très grandes infrastructures de recherche
- la défense et la sécurité.

Un des ses objectifs : garantir l'indépendance nationale en concevant, en fabriquant et en assurant la maintenance des armes nucléaires, outils de la politique de dissuasion. Le CEA en assure la crédibilité et la sécurité par son programme **Simulation**.

La concordance entre les résultats numériques du programme **Simulation** et les résultats expérimentaux à disposition permet de certifier la validité des modèles.

Ces modèles permettent notamment d'assurer la furtivité radar de certaines plateformes en simulant leurs *Surface Equivalente Radar* (SER), domaine d'application qui nous intéresse ici.

Code de calcul numérique \Rightarrow Résolution d'un très grand système linéaire $Ax = b$.

Objectif : Résoudre $Ax = b$. Deux possibilités :

- 1 Méthode directe : Coûte généralement plus cher mais précision optimale (généralement $\mathcal{O}(n^3)$).
- 2 Méthode itérative : Propose un compromis entre la précision et le temps de calcul (variable et problème-dépendant).

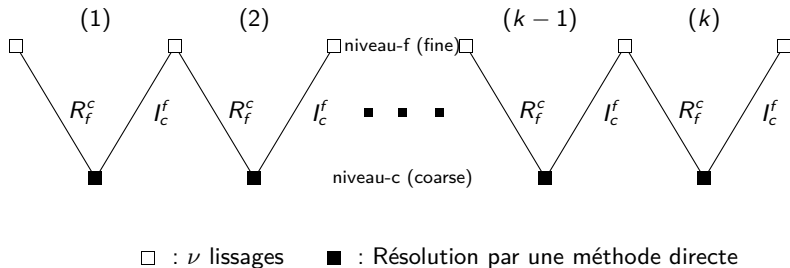
Plus gros est le problème, plus chère est la résolution du système !

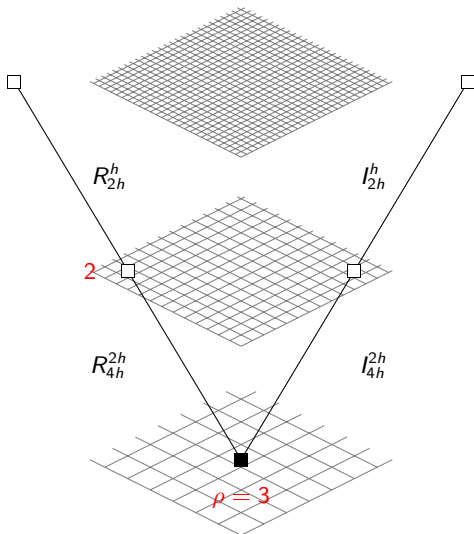
La complexité de calcul des **méthodes multigrilles** est réputée pour croître **linéairement** en fonction de la taille du problème (optimal !).

Cahier des charges

- 1 Éprouver la méthode pour une équation de **Laplace**
- 2 Éprouver la méthode pour une équation de **Helmholtz indéfinie**
- 3 Exposer les limitations de la méthode appliquée à une équation de Helmholtz indéfinie
- 4 Trouver des solutions et initier de futures pistes de recherche

Illustration d'un schéma multigrilles à 2 niveaux :





Plus le cycle est **profond**, plus le système est **petit**, plus la résolution est **rapide**

Illustration d'un schéma multigrille en V de profondeur $\rho = 3$.

□ : ν Lissages

■ : Résolution directe

Problématique : Comment choisir les opérateurs I_c^f and R_f^c et la méthode de lissage ?

L'analyse des valeurs propres est une piste pour répondre à cette question !

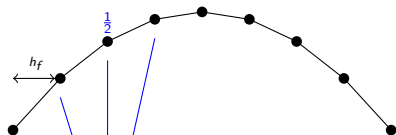
$$(\text{Problème de Laplace}) \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega = [0, 1] \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

En appliquant un schéma de différence finie de 2nd ordre sur une discrétisation uniforme de Ω :

$$A_h u_h = f_h \quad \text{with} \quad A_h = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1)$$

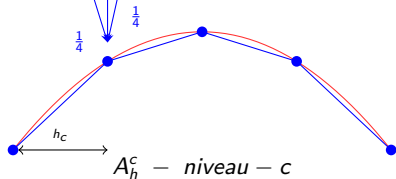
En appliquant une analyse locale de Fourier A_h :

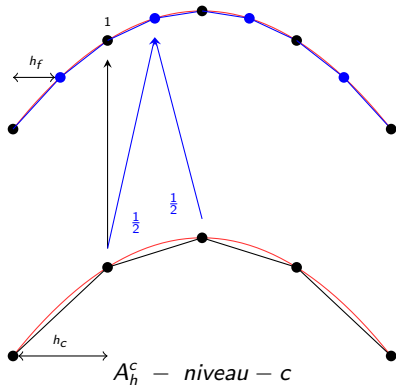
$$\forall j = 1, \dots, n, \quad \lambda_j(A_h) = \frac{2 - 2 \cos(j\pi h)}{h^2}, \quad v_j(A_h) = [\sin(lj\pi h)]_{l=1}^n$$

A_h – niveau – f


Le passage d'un espace **fin** vers un espace **grossier** peut être effectué par l'opérateur de *restriction* linéaire :

$$R_f^c = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$


 A_h^c – niveau – c

$A_h - \text{niveau} - f$


Et le transfert d'un espace **grossier** vers un espace **fin** par un opérateur d'*interpolation* linéaire :

$$I_c^f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 2 & & \vdots \\ 1 & 1 & \\ 0 & 2 & \ddots \\ \vdots & 1 & \ddots \\ 0 & \dots & \ddots \end{bmatrix} = 2(R_f^c)^T$$

Ces opérateurs conservent la structure de la matrice de Laplace :

$$A_h^c = R_f^c A_h I_c^f = A_{2h} = \frac{1}{(2h)^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1)$$

Avec les valeurs et vecteurs propres :

$$\forall j = 1, \dots, n_{2h}, \lambda_j(A_h^c) = \lambda_j(A_{2h}) = \frac{2 - 2 \cos(j\pi 2h)}{(2h)^2}, v_j(A_h^c) = [\sin(lj\pi 2h)]_{l=1}^n$$

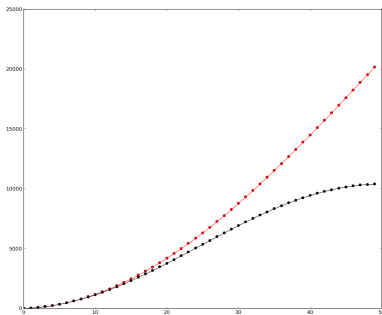


FIGURE 1 – Courbes des valeurs propres de A_h (rouge) et A_h^c (noir)

Composant de basses fréquences, qui sont les plus proches de 0, sont bien approximés par la matrice restreinte

Mais comment récupérer les valeurs propres de hautes fréquences ?

⇒ Par la **méthode de lissage** !

Choisissons par exemple la méthode de *Jacobi* pour lisser la solution.

$$A_h x_h = b_h \Leftrightarrow (D_h + A_h - D_h) x_h = b_h \Leftrightarrow D_h x_h = (D_h - A_h) x_h + b_h$$

Ce qui amène au processus itératif :

$$x_h^{(i+1)} = D_h^{-1} (D_h - A_h) x_h^{(i)} + D_h^{-1} b_h$$

$$e^{(i+1)} = x_h - x_h^{(i+1)} = D_h^{-1} (D_h - A_h) (x_h - x_h^{(i)}) = M_h e^{(i)}$$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} e^{(i)} = 0 \text{ si } \rho(M_h) = |\lambda_{\max}| < 1$$

Calculons les valeurs propres de M_h :

$$M_h = D_h^{-1} (D_h - A_h) = \text{Tridiag}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \lambda_j(M_h) = \cos(j\pi h)$$

Il est possible d'ajouter un poids w à la méthode pour capturer les λ de hautes fréquences. Calculons les valeurs propres de $M_{w,h}$:

$$M_{w,h} = wD_h^{-1}(D_h - A_h) + (1 - w)I \Rightarrow \lambda_j(M_{w,h}) = 1 + w(\cos(j\pi h) - 1)$$

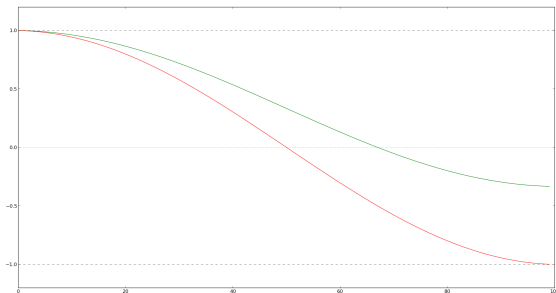


FIGURE 2 – Valeurs propres de la matrice de Jacobi (rouge) et $\frac{2}{3}$ -Jacobi (vert)

Les hautes fréquences sont bien récupérées par la méthode de relaxation

$$(\text{Problème de Helmholtz}) \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u \boxed{-k^2 u} = f \text{ sur } \Omega = [0, 1] \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

En appliquant un schéma de différence finie de 2nd ordre sur une discrétisation uniforme de Ω :

$$A_h u_h = f_h \quad \text{with} \quad A_h = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1) \boxed{-k^2 I}$$

En appliquant une analyse locale de Fourier A_h :

$$\forall j = 1, \dots, n; \quad \lambda_j(A_h) = \frac{2 - 2 \cos(j\pi h)}{h^2} \boxed{-k^2}, \quad v_j(A_h) = [\sin(lj\pi h)]_{l=1}^n$$

Les valeurs propres sont décalées !

1 - Les interpolateurs sont-ils toujours efficaces ?

$\forall j = 1, \dots, \frac{n}{2}$, $\lambda_j(A_h)$ (rouge) vs $\lambda_j(A_h^c)$ (noir)

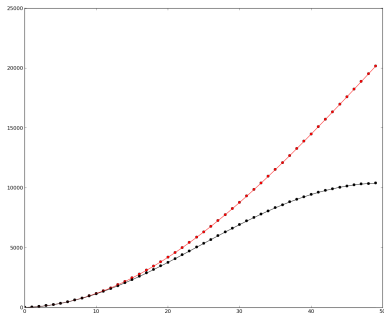


FIGURE 3 – $k = 0$

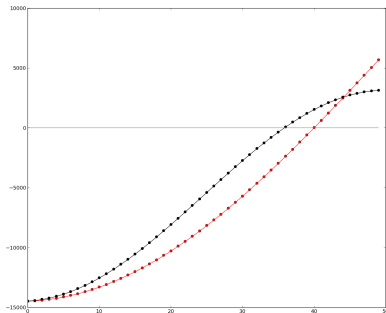


FIGURE 4 – $k = 38.3\pi$

1 - Les interpolateurs sont-ils toujours efficaces ?

$$A_h u_h = f_h \text{ avec } f_h = \sum_{j=1}^{n_h} \alpha_j v_j(A_h) \Leftrightarrow u_h = \sum_{j=1}^{n_h} \frac{\alpha_j}{\lambda_j(A_h)} v_j(A_h)$$

Near-Kernel Components (NKC, ie. $\lambda \approx 0$) sont les plus importantes à récupérer.

Les interpolateurs linéaires permettent de capturer les valeurs propres de basses fréquences mais pas les valeurs propres proches de 0 !

Décalage des valeurs propres $\Rightarrow \lambda$ de basses fréquences $\neq \lambda$ proches de 0.

2 - Les méthodes de relaxation usuelles sont-elles toujours appropriées ?

Méthodes de relaxation classiques réputées comme bonnes pour capturer les valeurs propres de hautes fréquences.

A propos de la méthode de *w-Jacobi* : Lorsque k augmente : $\lambda_{\text{basses fréquences}}(M) > 1$
avec M la matrice de propagation d'erreur de la méthode de relaxation utilisée.

2 - Les méthodes de relaxation usuelles sont-elles toujours appropriées ?

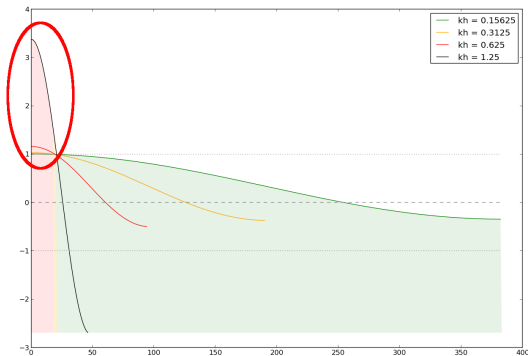


FIGURE 5 – Spectre de la matrice de propagation d'erreur de $\frac{2}{3}$ – Jacobi

Objectif : Trouver I_c^f et R_f^c permettant à la méthode directe de capturer les valeurs propres proches de 0.

Soit e_h une combinaison des vecteurs propres de A_h associés à des valeurs propres proches de 0. Alors, par définition :

$$A_h e_h = \sum_{l \text{ tq } \lambda_l \approx 0} \lambda_l \alpha_l v_l \approx 0.$$

Et donc :

$$\forall i \in [1, n] , \sum_{\forall j} a_{ij} e_j \approx 0 \Leftrightarrow a_{ii} e_i \approx \sum_{\forall j \neq i} -a_{ij} e_j$$

Donc finalement

$$w_{ij} = \frac{1}{2 - k^2 h^2} \Rightarrow I_c^f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2 - k^2 h^2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2 - k^2 h^2} & \frac{1}{2 - k^2 h^2} & \\ 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \frac{1}{2 - k^2 h^2} & \ddots \\ 0 & \dots & \ddots \end{bmatrix}, \quad R_f^c = \frac{1}{2} I_c^{fT}$$

Et

$$\lambda_j(A_h^c) = \frac{2 - 2 \cos(j\pi 2h)}{2h^2(2 - k^2 h^2)} - \frac{k^2}{2} \left(1 + \frac{2}{2 - k^2 h^2}\right).$$

Lorsque $k = 0$, on retrouve les opérateurs géométriques I_c^f et R_f^c identifiés précédemment !

$\lambda_j(A_h)$ (rouge) vs $\lambda_j(A_h^c)$ C-AMG (orange)

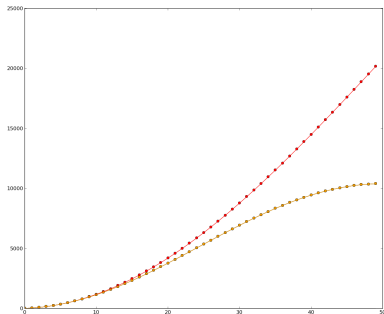


FIGURE 6 – $k = 0$

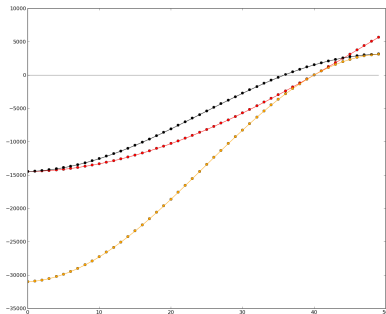


FIGURE 7 – $k = 38.3\pi$

Valeurs propres proches de 0 sont bien approchées

Objectif : Trouver une méthode capable de gérer les valeurs propres positives ET négatives

Candidats potentiels :

- 1 Méthodes de Krylov
- 2 Kaczmarz Relaxation

En augmentant le nombre de dimension du problème, l'intervalle des $\lambda \approx 0$ se densifie.

Solution potentielle : Attraper des $\lambda \approx 0$ par le lissage !

Problèmes similaires rencontrés dans le cas Maxwell défini¹. Deux méthodes de lissage présentées :

- 1 Overlapping Schwarz method
- 2 Distributive Relaxation

Ici sera utilisée **Distributive Relaxation** pour élargir l'intervalle des $\lambda \approx 0$ capturés.

1. Lisa Claus PhD - Multigrid smoothers for saddle point systems

Distributive Relaxation (DR)

Collection de sous-matrices construites depuis A_h



$G =$

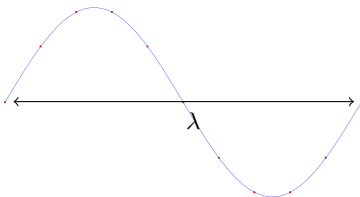
$$\begin{bmatrix} x & 0 & x & \dots \\ 0 & x & x & \dots \\ x & 0 & 0 & \dots \\ 0 & x & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ x & 0 & x & \dots \end{bmatrix}$$

, Lissage sur $G^T A_h G$ avec GMRES.

Contient les vecteurs propres associés aux $\lambda \approx 0$ des sous-matrices

- Expérimentation sur un V-cycle de profondeur $\rho = 4$ en 2D.
- $kh = 0.625$ Principe de base pour garder un nombre correct de points par ondulation

$$\left(\frac{\lambda}{h} = 10 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{kh} = 10 \Leftrightarrow kh \approx 0.625\right)$$



- k varie de 3 à 30 à pas de 0.1.
- Conditions de bords de *Sommerfeld* plutôt que celles de *Dirichlet*.

4 schéma de type V-cycle éprouvés ici :

- 1 **GMRES** : $\nu_1 = \nu_2 = 4$ itérations de GMRES sur tous les niveaux (sauf le plus grossier), puissance maximale m de A calculée (restart number) fixé à 3.
- 2 **Hybride** : $\nu_1 = \nu_2 = 4$ itérations de $(\frac{2-(kh)^2}{3-(kh)^2})$ -Jacobi calculées sur le niveau le plus fin et même configuration GMRES qu'en 1 sur les autres niveaux.
- 3 **GMRES + Distributive Relaxation** : Même configuration GMRES qu'en 1 mais avec *Distributive Relaxation* sur le niveau le plus fin. GMRES est utilisé pour *DR*, avec $\nu_1 = \nu_2 = 2$ et $m = 6$.
- 4 **Hybride + Distributive Relaxation** : Même configuration Hybride qu'en 2 et même lissage pour *DR*.

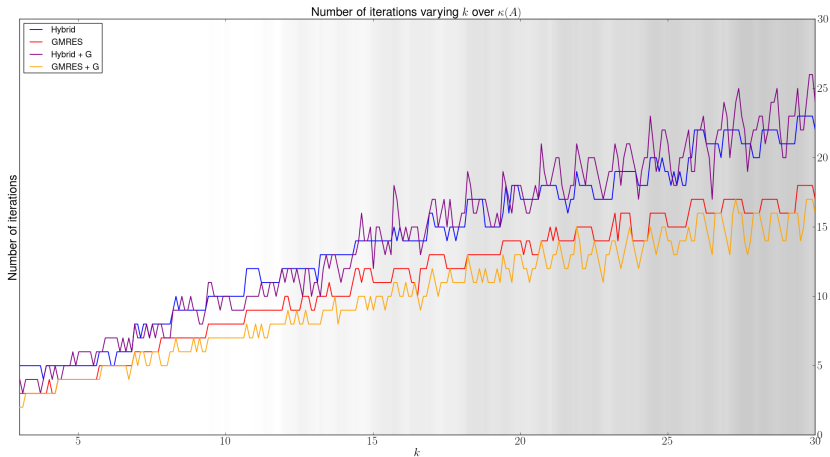


FIGURE 8 – V-cycle ($\rho = 4$) Expérimentation numérique

Résultats :

- Les différentes limitations rencontrées ont été exposées.
- Des solutions ont été proposées et permettent déjà de résoudre l'équation par des méthodes multigrilles en 1D et 2D.

Cependant :

- Le nombre d'itérations **croît** toujours en fonction de k .
- L'analyse du coût des solutions proposées n'est pas encore rigoureuse.

Prochainement :

- Utiliser la géométrie du problème et en déduire de meilleurs opérateurs.
- Création d'un démonstrateur parallèle lorsque la théorie sera validée.
- Extension en 3D.

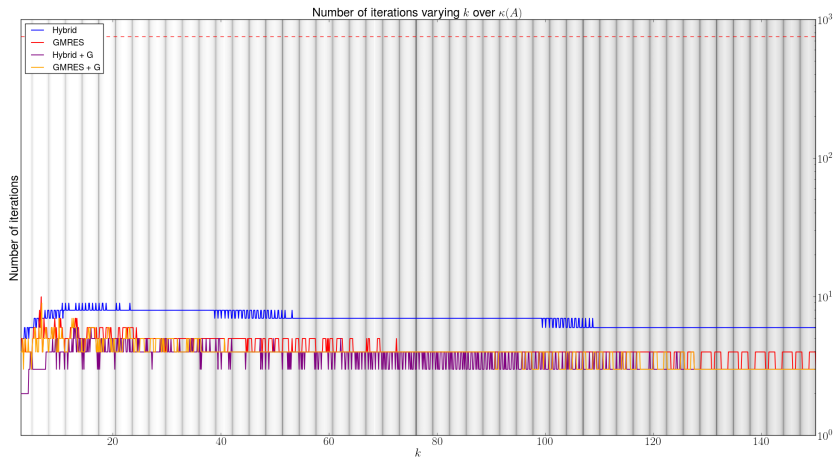


FIGURE 9 – V-cycle ($\rho = 4$) Expérimentation numérique