Solveurs distribués pour les équations intégrales et $\mathcal{H}$-matrices

Pierre Marchand [1]

2 Octobre, 2024 — Bordeaux

[1] Inria

Préconditionneurs DDM pour équations intégrales de frontière

- Résoudre $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbf{A}$ est la discrétisation/compression d'un opérateur intégrale de frontière (BEM).
- Contexte du parallélisme à mémoire distribué

→ solveur itératif avec préconditionneur.

Préconditionneurs DDM pour équations intégrales de frontière

- Résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ où $\mathbf{A}$ est la discrétisation/compression d'un opérateur intégrale de frontière (BEM).
- Contexte du parallélisme à mémoire distribué

→ solveur itératif avec préconditionneur.

Préconditionneurs

- Préconditionneurs algébriques (incomplete-LU, SPAI,...)
- Préconditionneurs analytiques (Calderón, OSRC,...)
- Préconditionneurs DDM

Préconditionneurs DDM pour équations intégrales de frontière

- Résoudre $\mathsf{Ax} = \mathsf{b}$ où A est la discrétisation/compression d'un opérateur intégrale de frontière (BEM).
- Contexte du parallélisme à mémoire distribué

→ solveur itératif avec préconditionneur.

Préconditionneurs

- Préconditionneurs algébriques (incomplete-LU, SPAI,...)
- Préconditionneurs analytiques (Calderón, OSRC,...)
- Préconditionneurs DDM

$$\implies \mathsf{P}_{\mathrm{ASM}} = \mathsf{R}_0^T(\mathsf{R}_0\mathsf{A}\mathsf{R}_0^T)^{-1}\mathsf{R}_0 + \sum_{p=1}^{n} \mathsf{R}_p^T(\mathsf{R}_p\mathsf{A}\mathsf{R}_p^T)^{-1}\mathsf{R}_p$$

où R_p est la matrice de restriction au sous domaine p pour $p > 0$, et les colonnes de R_0^T définisse un espace grossier.

En pratique

Méthodes de Schwarz pour opérateurs intégraux de frontière

- Décomposition de domaine de la surface
- Théorie avec deuxième niveau GenEO pour l'hypersingulier et problèmes définis positifs.
- Travaux en cours : thèse de Timothée Raynaud encadré avec Axel Modave et Victorita Dolean.

En pratique

Méthodes de Schwarz pour opérateurs intégraux de frontière

- Décomposition de domaine de la surface
- Théorie avec deuxième niveau GenEO pour l'hypersingulier et problèmes définis positifs.
- Travaux en cours : thèse de Timothée Raynaud encadré avec Axel Modave et Victorita Dolean.

Contrainte sur l'implémentation

- Avoir la main sur la distribution des données
- Facilement composer : compression de rang faible, condition d'admissibilité, mais aussi compression du système linéaire et preconditionneur.

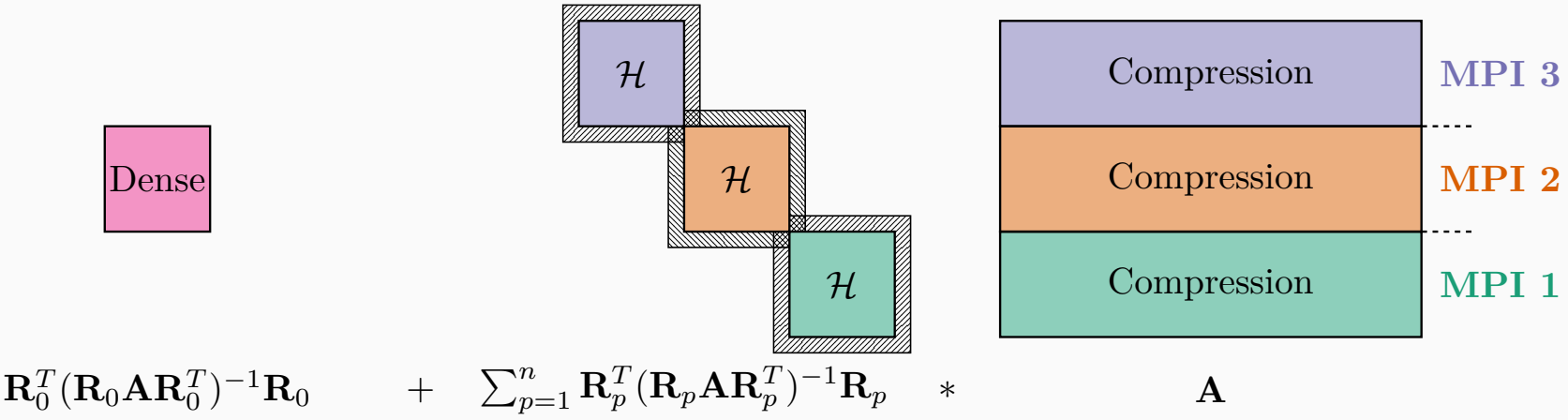
Htool-DDM

Caractéristiques

- BLAS/LAPACK, MPI, et éventuellement OpenMP.
- HPDDM pour les méthodes de Krylov (et blocs, et recyclage,...).
- Code C++ (10411 lignes de code) avec interface python.
- Compression en boite noire avec $\mathcal{H}$-matrices par défaut

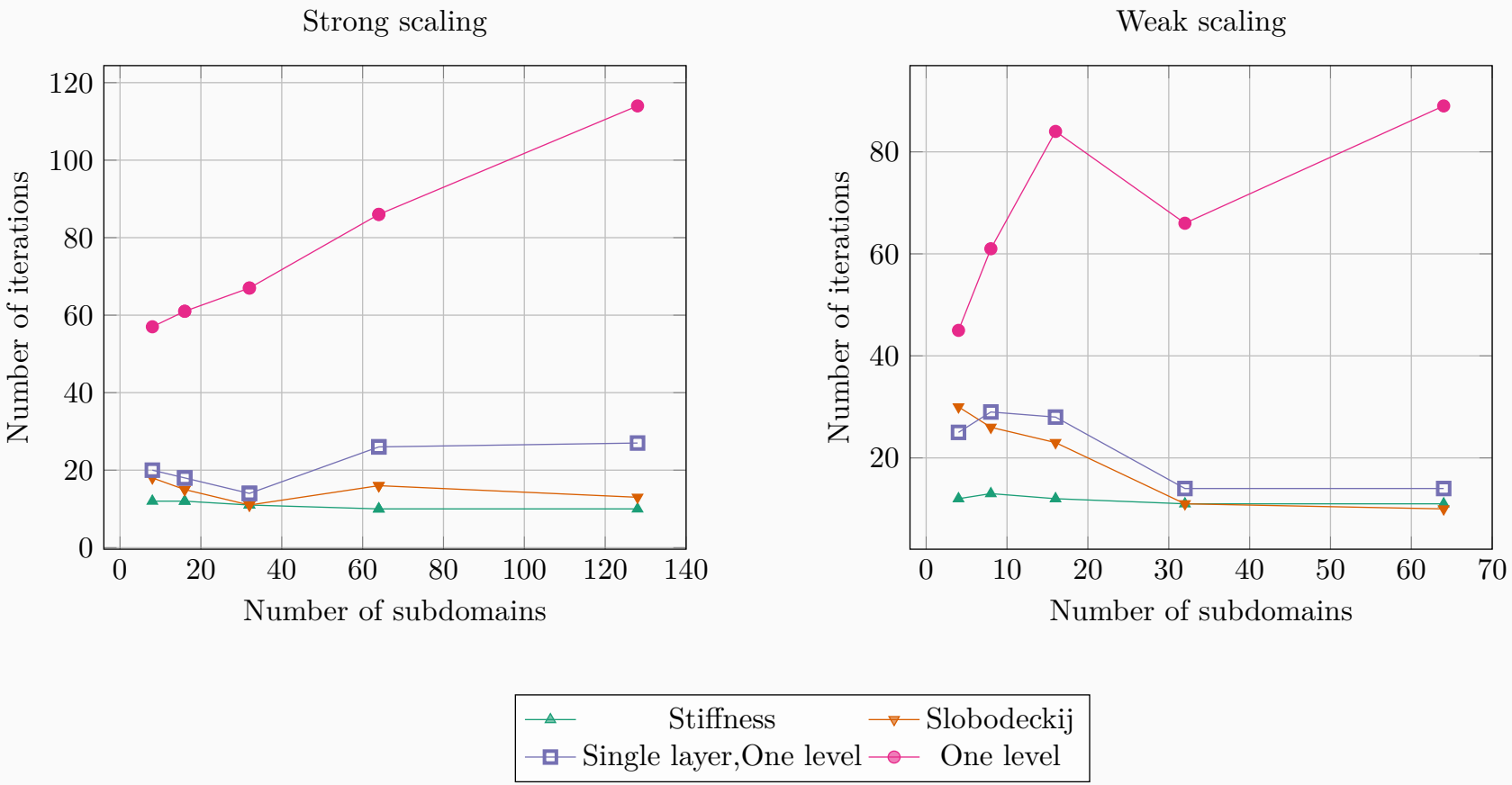
Caractéristiques

- BLAS/LAPACK, MPI, et éventuellement OpenMP.
- HPDDM pour les méthodes de Krylov (et blocs, et recyclage,...).
- Code C++ (10411 lignes de code) avec interface python.
- Compression en boite noire avec $\mathcal{H}$-matrices par défaut



Applications : GenEO coarse space

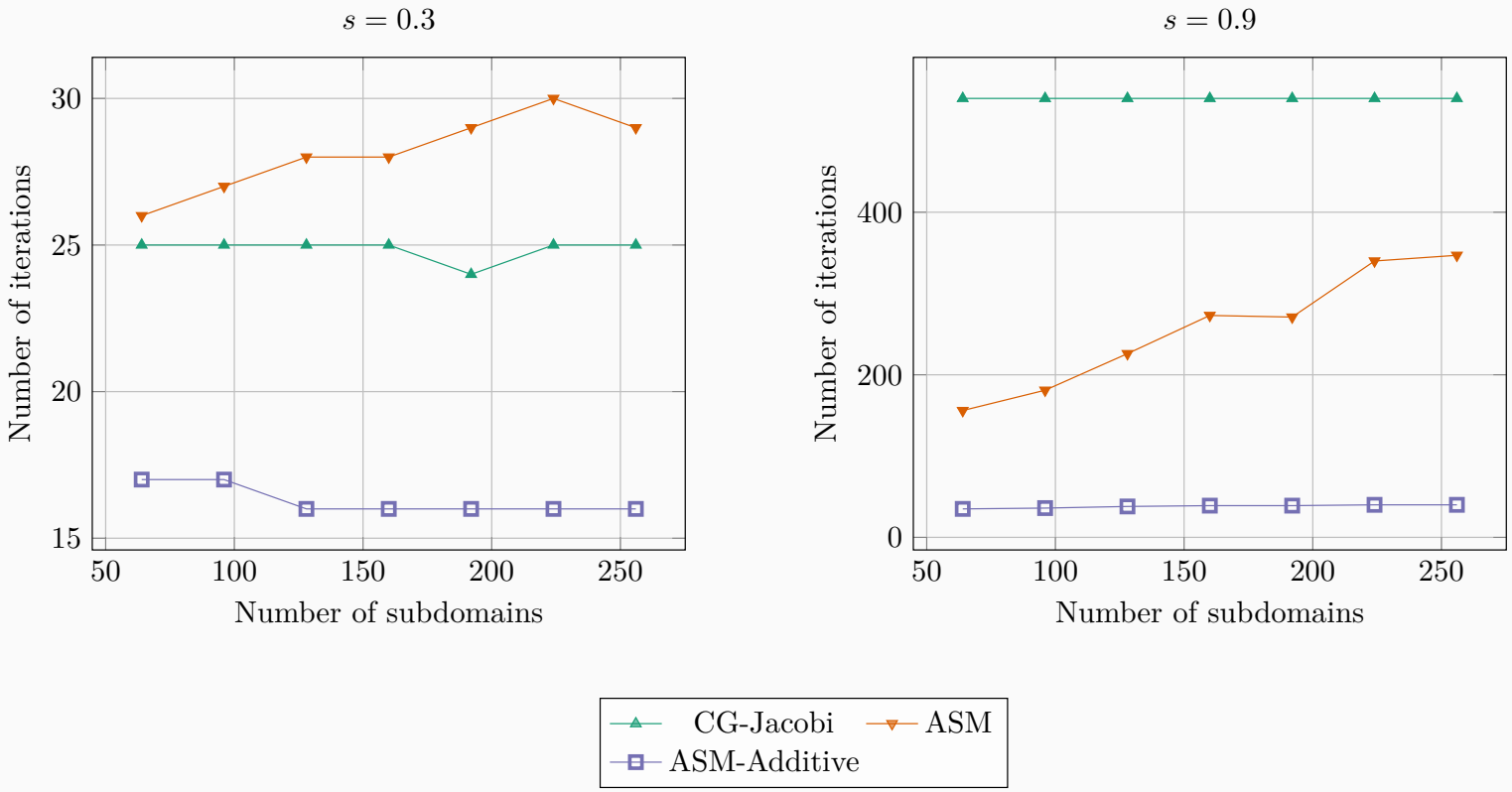
GenEO for Hypersingular operator



2D experiment for 24 000 P^1 Lagrange elements and $\tau = 60$ with CG.

Applications : GenEO coarse space

Laplacien fractionnaire $-\Delta^s$, collaboration avec Christian Glusa (Sandia)



Strong scaling in 2D for 258 171 P^1 Lagrange elements and $\tau = 10$ with CG.

Le format $\mathcal{H}^2$ est utilisé pour le système linéaire !

Intégrations

FreeFEM, en collaboration avec Pierre-Henri Tournier (Sorbonne Université)

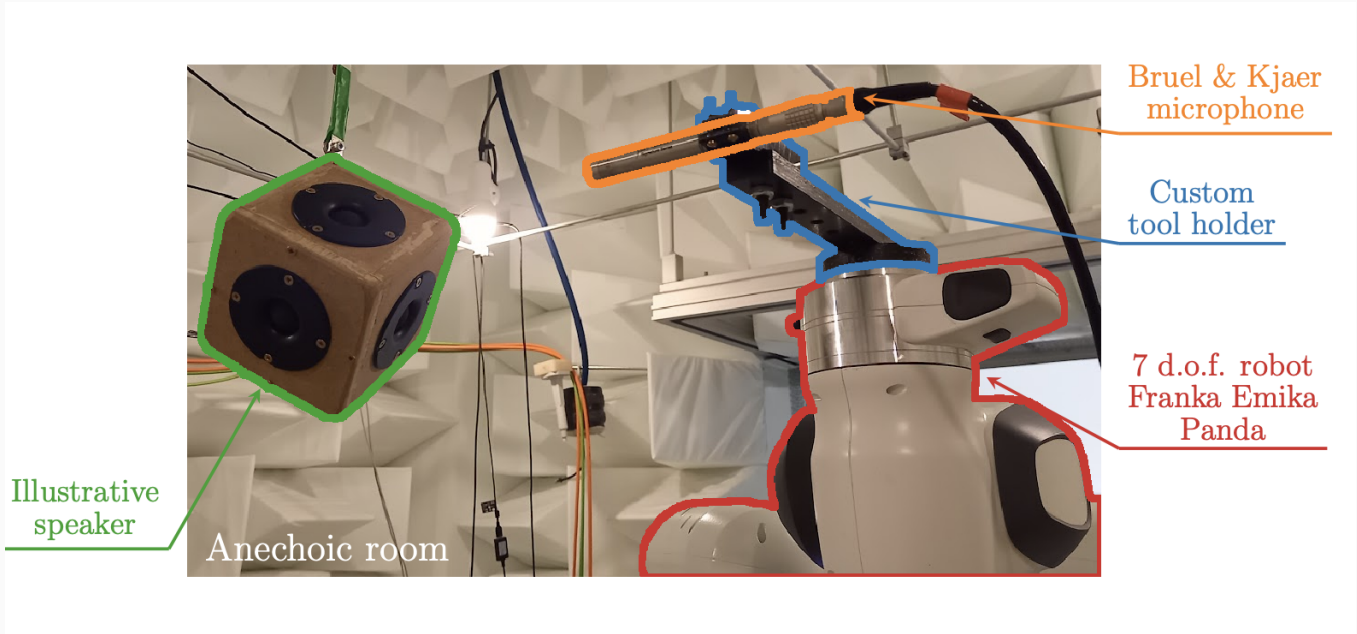
- utilisée avec BEMTool (Xavier) pour BEM en 2019 (version 4.5).
- FEM/BEM ajouté en 2023 (version 4.13).

Intégrations

FreeFEM, en collaboration avec Pierre-Henri Tournier (Sorbonne Université)

- utilisée avec BEMTool (Xavier) pour BEM en 2019 (version 4.5).
- FEM/BEM ajouté en 2023 (version 4.13).

Exemple d'application



Collaboration avec C. Pascal (U2IS/UME, ENSTA).

Intégrations

PETSc, en collaboration avec Pierre Jolivet (Sorbonne Université)

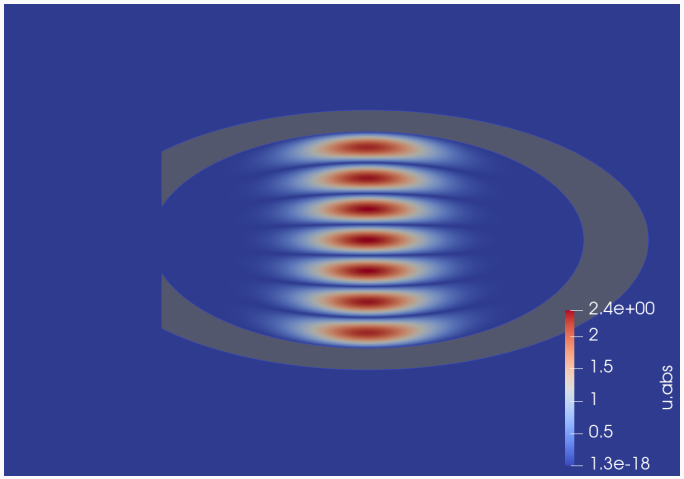
- peut être utilisée avec HPDDM, SLEPc, etc.

Intégrations

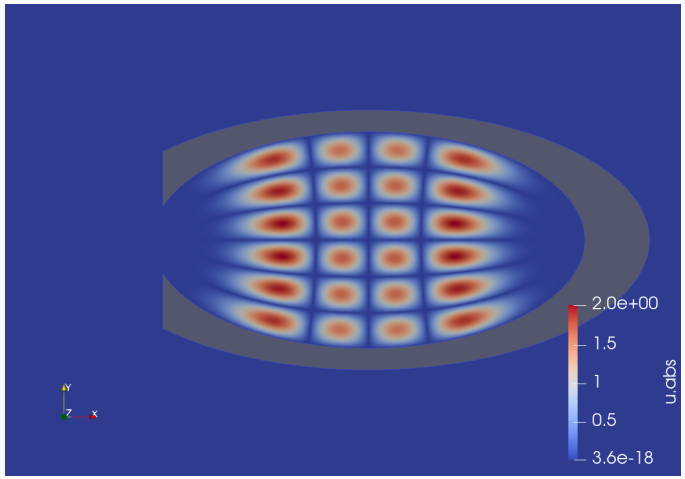
PETSc, en collaboration avec Pierre Jolivet (Sorbonne Université)

- peut être utilisée avec HPDDM, SLEPc, etc.

Exemple d'utilisation : analyse de formulation BEM et FEM/BEM pour les méthodes de Krylov



(a) $k^e_{3,0} = 22.526496854613104$



(b) $k^o_{2,4} = 22.6811692253925$

Absolute value of the eigenfunction of the truncated exterior Dirichlet problem associated with the smallest eigenvalue for the large cavity.

Intégrations

PETSc, en collaboration avec Pierre Jolivet (Sorbonne Université)

- peut être utilisée avec HPDDM, SLEPc, etc.

Exemple d'utilisation : analyse de formulation BEM et FEM/BEM pour les méthodes de Krylov

	Circle	Ellipse	Expected
$\|B_{k,\eta,S_{ik}}\|$	~ 1	~ 1	$\lesssim 1$
$\|(B_{k,\eta,S_{ik}})^{-1}\|$	$\sim k^{0.34}$	$\sim k^{0.28}$	$\lesssim k^{1/3}$

Table 1 – Comparison of the k-dependence of the computed norms for the circle and the ellipse.

$$B_{k,\eta,S_{ik}} := S_{ik}H_k + i\eta\left(\frac{1}{2}I_{\mathrm{d}} - K_k\right) \xrightarrow{discr.} \mathbf{B}_{k,\eta,\mathbf{S}_{ik}} := \mathbf{S}_{ik}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}_k + i\eta\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\mathrm{d}} - \mathbf{K}_k\right)$$

Questions actuelles

En lien avec les $\mathcal{H}$-matrix

- Problèmes aux valeurs propres généralisés pour GenEO.
- Quel produit $\mathcal{H}$-matrix/$\mathcal{H}$-matrix pour $\mathcal{H}$-LU ?
- Compression avec directionnalité pour les $\mathcal{H}$-matrix ?

De façon moins direct

- Comparaison avec AFN (Y. Xi, Emory U.)
- DDM pour l'interpolation Gaussienne (E. Chow, Georgia Tech)
- RCFIE avec DDM.